Concours National Commun - Session 2011

Corrigé de l'épreuve d'analyse

Étude de la somme de la série de Fourier lacunaire quadratique : $x \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{i\pi n^2 x}}{i\pi n^2}$

Corrigé par Mohamed TARQI[1]

$1^{\text{ère}}$ partie
Formule sommatoire de Poisson

1.1. D'après les hypothèses, il existe $M > 0$ et $A > 0$ tels que $|t| \geq A \Longrightarrow |g(t)| \leq \dfrac{M}{t^2}$, ainsi les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{-A} |g(t)|dt$ et $\displaystyle\int_{A}^{+\infty} |g(t)|dt$ existent, il est de même de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|dt$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto g(t)e^{-ixt}$ est absolument intégrable sur $\mathbb{R}$ ($|e^{-ixt}| = 1$) et donc elle est intégrable sur $\mathbb{R}$.
1.2. Soit $t \in [-a, a]$ $(a > 0)$. Il existe un entier $n_0 \in \mathbb{N}$ et supérieure à a tel que :

$$n \geq n_0 \Longrightarrow |g_n(t)| \leq \frac{M}{(t + 2n\pi)^2} + \frac{M}{(t - 2n\pi)^2} = v_n(t).$$

Il est clair que v_n est paire et décroissante sur $[0, a]$ et donc pour tout $t \in [-a, a]$, $|v_n(t)| \leq v_n(0)$ et comme la série numérique $\sum v_n(0)$ est convergente, alors la série $\sum g_n$ est uniformément convergente sur tout $[-a, a]$ et donc sur tout segment de $\mathbb{R}$.
1.3.
1.3.1. Les applications g_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$g_0'(t) = g'(t), \quad g_n'(t) = g'(t + 2n\pi) + g'(t - 2n\pi) \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Donc comme la série $\sum g_n$, on montre que la série $\sum g_n'$ est uniformément convergente sur tout segment de $\mathbb{R}$, ceci permet de conclure par un théorème du cours que $\widetilde{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
1.3.2. Notons $S_n(t) = \sum\limits_{p=-n}^{n} g(t + 2p\pi)$, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} S_n(t + 2\pi) &= \sum_{p=-n}^{n} g(t + 2(p+1)\pi) \\ &= \sum_{p=-n+1}^{n+1} g(t + 2p\pi) \\ &= \sum_{p=-n+1}^{n-1} g(t + 2p\pi) + g(t + 2n\pi) + g(t + 2(n+1)\pi) \end{aligned}$$

Donc

$$S_n(t + 2\pi) = S_{n-1}(t) + g(t + 2n\pi) + g(t + 2(n-1)\pi).$$

Mais $\lim\limits_{t \to \infty} g(t) = 0$, alors l'égalité précédente entraîne, quand n tend vers l'infini,

$$\widetilde{g}(t + 2\pi) = \widetilde{g}(t)$$

[1] Si vous avez des critiques ou des encouragements à formuler sur le contenu, n'hésitez pas à nous en faire part, et surtout n'hésitez pas de me signaler les erreurs rencontrées.

donc $\widetilde{g}$ est 2π périodique.

La série définissant $\widetilde{g}$ peut être intégrée terme à terme sur $[0, 2\pi]$ grâce à la convergence uniforme et donc

$$\begin{aligned} c_k(\widetilde{g}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \widetilde{g}(t)e^{-ikt}dt \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\sum_{p=-n}^{n}\int_0^{2\pi} g(t+2p\pi)e^{-ikt}dt \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\sum_{p=-n}^{n}\int_{-2p\pi}^{2(p+1)\pi} g(u)e^{-iku}du, \quad u = t+2p\pi \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-2n\pi}^{2(n+1)\pi} g(u)e^{-iku}du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(u)e^{-iku}du = \frac{1}{2\pi}\widehat{g}(k). \end{aligned}$$

1.3.3. L'égalité $|g(2n\pi)| = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, montre que la famille $(g(2n\pi))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et que

$$(*) \quad \widetilde{g}(0) = \lim_{n\to\infty}\sum_{p=-n}^{p=n} g(2p\pi).$$

Puisque $\widetilde{g}$ est 2π périodique et $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors, d'après le théorème de Dirichlet, la famille $(c_n(\widetilde{g}))_{n\in\mathbb{Z}}$ est sommable et

$$(**) \ \ \forall x \in \mathbb{R}, \quad \widetilde{g}(x) = c_0(g) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(g)e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(g)e^{-inx}$$

et comme $\widehat{g}(k) = 2\pi c_n(\widetilde{g})$, alors la famille $(\widehat{g}(n))_{n\in Z}$ est sommable.
L'égalité $(**)$ entraîne pour $x = 0$, l'égalité $\widetilde{g}(0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(\widetilde{g}) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{g}(n)$ et en tenant compte de la relation $(*)$, on obtient l'égalité demandée :

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(2n\pi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{g}(n).$$

$2^{\text{ème}}$ partie
Application de la formule sommatoire de Poisson

2.1. Il est clair que la fonction h_α est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\lim_{|t|\to\infty} t^2h_\alpha(t) = \lim_{|t|\to\infty} t^2h'_\alpha(t) = 0$, donc les les fonctions $t \longmapsto t^2h_\alpha(t)$ et $t \longmapsto t^2h_\alpha(t)$ sont bornées à l'infini.

2.2. On a $\widehat{h_1}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}e^{-ixt}dt$. On peut dériver la fonction sous signe intégrale, en effet,

- La fonction $f : (x,t) \longmapsto e^{-t^2}e^{-ixt}$ admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) : (x,t) \longmapsto -ite^{-t^2}e^{-ixt}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = |-itf(x,t)| \leq |t|e^{-t^2} = \varphi(t)$ et φ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Donc $\widehat{h_1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\widehat{h_1}'(x) = -i\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} te^{-t^2}e^{-ixt}dt$ et une intégration par parties donne

$$\widehat{h_1}'(x) = -\frac{x}{2}\widehat{h_1}(x).$$

Ainsi $\widehat{h_1}$ est solution de l'équation différentielle $y' + \dfrac{x}{2}y = 0$.

2.3. La solution générale de (1) s'écrit $y(x) = \lambda e^{\frac{-x^2}{4}}$. Mais $\widehat{h_1}$ étant l'unique solution de (1) vérifiant $\widehat{h_1}(0) = \sqrt{\pi}$, donc $\widehat{h_1}(x) = \sqrt{\pi}e^{\frac{-x^2}{4}}$.

2.4. On a, grâce au changement de variable, $u = \alpha t$,

$$\widehat{h_\alpha}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha^2t^2}e^{-ixt} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}e^{-ix\frac{u}{\alpha}}\frac{du}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}\widehat{h_1}\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}e^{\frac{-x^2}{4\alpha^2}}.$$

2.5. Posons $\alpha = \dfrac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}}$, alors pour tout entier n, on a $\widehat{h_\alpha}(n) = \frac{2\pi}{\sqrt{a}}e^{\frac{-\pi n^2}{a}}$ et $h_\alpha(2n\pi) = e^{-\pi n^2 a}$. La formule de Poisson appliquée à h_α, donne :

$$2\pi\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} h_\alpha(2n\pi)\right) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\widehat{h_\alpha}(n)$$

égalité qui s'écrit encore sous la forme demandée :

$$\sqrt{a}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 a}\right) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi n^2}{a}}.$$

3ème partie
Un résultat général sur les fonctions holomorphes

3.1. Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ comme image réciproque de l'ouvert $]0, +\infty[$, par l'application continue $z \longmapsto \text{Im}(z)$.
Soit a et b dans Ω, alors pour tout $t \in]0, 1[$, $\text{Im}((1-t)a + tb) = (1-t)\text{Im}(a) + t\text{Im}(b) > 0$, donc $(1-t)a + tb \in \Omega$ et donc $[a, b] \subset \Omega$. Ceci montre aussi que Ω est connexe par arcs de $\mathbb{C}$.

3.2. Soit $a \in \Omega$ fixé. Pour tout $t \in [0, 1]$, $(1-t)a + tb \in \Omega$, et donc l'application $b \longmapsto f((1-)a + tb)$ est bien définie et continue sur Ω, donc l'application Φ_a est continue sur Ω comme produit de deux fonctions continues.

3.3. Soit $c \in \Omega$ tel que $\displaystyle\int_{\gamma_{a,c}} \psi(z)dz + \int_{\gamma_{c,b}} \psi(z)dz = \int_{\gamma_{a,b}} \psi(z)dz$ alors cette relation s'écrit encore, après simplification, sous la forme

$$(\overline{a} - \overline{b})c - (a - b)\overline{c} = b\overline{a} - a\overline{b}$$

Donc $\text{Im}((\overline{a} - \overline{b})c) = \text{Im}(\overline{a}b)$, donc $c \in \Omega$ décrit une droite parallèle à l'axe des x, où une demi-droite dans le cas contraire.

3.4.

3.4.1. La fonction $f = P + iQ$ étant holomorphe sur Ω, donc elle vérifie les conditions Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial Q}{\partial y}(x, y) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(x, y) = -\dfrac{\partial Q}{\partial x}(x, y), \end{cases}$$

pour tout $(x, y) \in \Omega^2$.

3.4.2 D'après Formule de Green-Riemann, on a :

$$\int_{\partial\mathcal{T}^+} Pdx - Qdy = \int\int_{\mathcal{T}}\left(-\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = 0.$$

De même
$$\int_{\partial T^+} Qdx + Pdy = \int\int_{T}\left(-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$
D'autre part, $\displaystyle\int_{\partial T^+} f(z)dz = \int_{\partial T^+} Pdx - Qdy + i\int_{\partial T^+} Qdx + Pdy = 0$, or $\partial T^+ = \gamma_{a,c} + \gamma_{c,b} + \gamma_{b,a}$, donc l'égalité $\displaystyle\int_{\partial T^+} f(z)dz = 0$ est équivalent aussi à
$$\int_{\gamma_{a,c}} f(z)dz + \int_{\gamma_{c,b}} f(z)dz = -\int_{\gamma_{b,a}} f(z)dz = \int_{\gamma_{a,b}} f(z)dz.$$

3.4.3. Soit $c \in \Omega$ et $c \neq b$, alors $\Phi_a(c) - \Phi_a(b) = \displaystyle\int_{\gamma_{a,c}} f(z)dz - \int_{\gamma_{a,b}} f(z)dz = -\int_{\gamma_{c,b}} f(z)dz = \Phi_b(c)$ et donc
$$\frac{\Phi_a(c) - \Phi_a(b)}{c-b} = \Phi_b(c)$$
et comme Φ_b est continue en b, alors
$$\lim_{c\to b}\frac{\Phi_a(c) - \Phi_a(b)}{c-b} = \lim_{c\to b}\Phi_b(c) = \int_0^1 f((1-t)b + tb)dt = f(b).$$
Ceci montre que Φ_a est holomorphe sur Ω et que $\Phi_a' = f$.
3.4.4. Pour tout $r > 0$, on peut écrire :
$$\Phi(ir, c) - \Phi(ir, b) = \Phi(b, c)$$
et quand r tend vers 0^+, on obtient l'égalité :
$$F(c) - F(b) = \Phi(b, c)$$
et comme précédament,
$$\lim_{c\to b}\frac{F(c) - F(b)}{c-b} = \lim_{c\to b}\Phi_b(c) = f(b).$$
Ceci montre que F est holomorphe sur Ω et que $F' = f$ sur Ω.

4ème partie
Étude d'un exemple

4.1. La fonction f_λ apparaît comme composée et produit de fonctions holomrphes sur Ω, donc elle holomorphe sur Ω.
4.2. On a pour tout $z = \alpha + i\beta \in \Omega$,
$$|f_\lambda(z)| = |z^\lambda||\exp\left(-\frac{i}{z}\right)| = |z|^\lambda \exp\left(\frac{-\beta}{|z|^2}\right) \leq |z|^\lambda.$$
Soit maintenant $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positives de limite nulle, on a :
$$J_{\lambda,b}(r_n) = \int_{\gamma_{ir_n,b}} f_\lambda(z)dz = (b - ir_n)\int_0^1 f_\lambda((1-t)ir_n + tb)dt$$
On a $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_\lambda(1-t)ir_n + tb) = f_\lambda(tb)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|f_\lambda((1-t)ir_n + tb)| \leq |(1-t)ir_n + tb|^\lambda \leq \frac{|b|^\lambda}{t^{-\lambda}} = \varphi(t)$$

et comme $0 < -\lambda < 1$, alors φ est intégrable sur $]0,1]$ et donc le théorème de convergence dominée s'applique :

$$\lim_{n\to\infty} J_{\lambda,b}(r_n) = b\int_0^1 f_\lambda(tb) = t^{\lambda+1}\int_0^1 t^\lambda \exp\left(\frac{-i}{tb}\right) dt.$$

4.3.
4.3.1. D'après la $4^{\text{ème}}$ partie, F_λ est holomorphe sur Ω et $F'_\lambda = f_\lambda$. Donc G_λ est holomorphe sur Ω comme produit de fonctions holomorphes.
4.3.3. On a, pour tout $z \in \Omega$, en posant $t = \dfrac{1}{u}$:

$$F_\lambda(z) = z^{\lambda+1}\int_{]0,1]} t^\lambda \exp\left(\frac{-i}{tz}\right) dt = z^{\lambda+1}\int_1^{+\infty} u^{-\lambda-2}\exp\left(\frac{-iu}{z}\right) du.$$

D'où :

$$G_\lambda(z) = \frac{1}{z}\exp\left(\frac{i}{z}\right)\int_1^{+\infty} u^{-\lambda-2}\exp\left(\frac{-iu}{z}\right) du.$$

4.3.3 Une intégration parties donne :

$$\begin{aligned}
G_\lambda(z) &= \frac{-i^2}{z}\int_1^{+\infty} u^{-\lambda-2}\exp\left(\frac{(1-u)i}{z}\right) du \\
&= i\left[u^{-\lambda-2}\exp\left(\frac{(1-u)i}{z}\right)\right]_1^{+\infty} + i(\lambda+2)\int_1^{+\infty} u^{-\lambda-3}\exp\left(\frac{(1-u)i}{z}\right) du \\
&= i + i(\lambda+2)\int_1^{+\infty} u^{-\lambda-3}\exp\left(\frac{(1-u)i}{z}\right) du
\end{aligned}$$

et comme $\left|\exp\left(\dfrac{(1-u)i}{z}\right)\right| \leq 1$, car $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1-u}{z}\right) < 0$, il vient alors

$$|G_\lambda(z)| \leq 1 + (\lambda+2)\int_1^{+\infty} u^{-\lambda-3} du = 2.$$

D'autre part on a, pour tout $z \in \Omega$, $F_{-1/2}(z) = z^{3/2}\exp\left(\dfrac{-i}{z}\right) G_{-1/2}(z)$ et donc $|F_{-1/2}| \leq 2|z|^{3/2}$ puisque $\left|\exp\left(\dfrac{-i}{z}\right)\right| \leq 1$.

$5^{\text{ème}}$ partie
Démonstration de la propriété proposée

5.1. Posons $z = a + ib$, alors on a :

$$\left|\frac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = e^{-b\pi((n+1)^2-n^2)},$$

- si $b > 0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = 0$ et dans ce cas la série $\sum u_n(z)$ converge ;
- si $b < 0$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = +\infty$ et la série $\sum u_n(z)$ diverge ;
- si $b = 0$, $|u_n(z)| = 1$ et donc $u_n(z)$ ne tend pas vers 0.

Conclusion, la série $\sum u_n(z)$ converge si et seulement si $z \in \Omega$.

5.2. Si $z \in \Omega$, alors $z+1 \in \Omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$u_n(z+1) + u_n(z) = e^{i\pi n^2 z}(e^{i\pi n^2} + 1) = \begin{cases} 2u_p(4z), & \text{si} n = 2p \\ 0, & \text{si} n = 2p+1 \end{cases},$$

d'où :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z+1) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = 2\sum_{p=1}^{\infty} u_p(4z)$$

c'est-à-dire $u(z+1) + u(z) = 2u(4z)$.

5.3.

5.3.1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R} \times [a, +\infty[$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|n^k u_n(x,y)| \leq n^k e^{-y\pi n^2} \leq n^k e^{-a\pi n^2}$ et la série $\sum n^k e^{-a\pi n^2}$ converge, car $\lim_{n\to\infty} n^2(n^k e^{-a\pi n^2}) = 0$, donc la série $\sum n^k \widetilde{u_n}$ converge normalement sur $\mathbb{R} \times [a, +\infty[$.

5.3.2. Soit $y > 0$ fixé. Les fonctions $v_n : x \longmapsto \widetilde{u_n}(x,y)$ sont dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$v_n'(x) = \frac{\partial u_n}{\partial x}(x,y) = i\pi n^2 u_n(x,y),$$

de plus la série $\sum v_n' = i\pi \sum n^2 u_n$ est normalement convergente donc uniformément convergente, donc on peut conclure que $\widetilde{u}$ possède une dérivée partielle en tout point par rapport à x et que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[, \quad \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x}(x,y) = i\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \widetilde{u_n}(x,y)$$

5.3.3. De la même façon, on montre que $\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y}(x,y)$ existe et que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[, \quad \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y}(x,y) = -\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \widetilde{u_n}(x,y) = i\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x}(x,y)$$

5.3.3. La question précédente montre que u vérifie les conditions de Cauchy-Riemann sur Ω, donc u est holomorphe sur Ω.

5.4. La formule (2) s'écrit, à l'aide de u, sous la forme :

$$\left(\frac{ia}{i}\right)^{1/2} (1 + 2u(ia)) = 1 + 2u\left(-\frac{1}{ia}\right),$$

et d'après le principe du prolongement analytique, cette égalité qui est vraie pour les points de Ω de la forme ia, se prolonge à Ω :

$$\forall z \in \Omega, \quad \left(\frac{z}{i}\right)^{1/2} (1 + 2u(z)) = 1 + 2u\left(-\frac{1}{z}\right)$$

5.5. Pour tout $z \in \Omega$, on a, en tenant compte des questions **5.2.** et **5.4.** :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{i}{z}\right)^{1/2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\exp\left(\frac{-i\pi n^2}{4z}\right) - \exp\left(\frac{-i\pi n^2}{z}\right)\right) &= \left(\frac{i}{z}\right)^{1/2} u\left[\left(-\frac{1}{4z}\right) - u\left(-\frac{1}{z}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{i}{z}\right)^{1/2} \left[\left(\frac{4z}{i}\right)^{1/2} (1 + 2u(4z)) - \left(\frac{z}{i}\right)^{1/2} (1 + 2u(z))\right] \\
&= \frac{1}{2} + u(z+1)
\end{aligned}$$

5.6. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|u_n(z)| = e^{-\mathrm{Im}(z)\pi n^2} \leq 1$ et donc $\left|\frac{u_n(z)}{i\pi n^2}\right| \leq \frac{1}{\pi n^2}$, donc la série $\sum \frac{u_n}{i\pi n^2}$ est normalement convergente, donc uniformément convergente sur $\{z \in \mathbb{C}/\mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ et comme les u_n sont continues, il est de même de la somme v.

5.7. On a pour tout $z \in \Omega$, $|F_{-1/2}(z)| \leq 2|z|^{3/2}$ et donc

$$nF_{\frac{-1}{2}}\left(\frac{\alpha z}{\pi n^2}\right) \leq 2\left|\frac{\alpha z}{\pi}\right|^{3/2}\frac{1}{n^2}$$

donc la série $\sum nF_{-1/2}\left(\frac{\alpha z}{\pi n^2}\right)$ est absolument convergente sur Ω, donc convergente sur Ω.

5.8.

5.8.1. Les fonctions u_n sont holomorphes sur Ω et $u_n'(z) = i\pi n^2 u_n(z)$ pour tout $z \in \Omega$, et comme la série $\sum \frac{u_n}{i\pi n^2}$ converge uniformément sur Ω, alors v_1 est holomorphe et sa dérivée s'obtient, en dérivant terme à terme :

$$\forall z \in \Omega, \quad v_1'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) = u(z).$$

5.8.2. Soit $\forall z \in \Omega$, alors :

$$w'(z)(z) = \frac{(i\pi)^{1/2}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi n}F'_{-1/2}\left(\frac{4z}{\pi n^2}\right) - \frac{2}{\pi n}F'_{-1/2}\left(\frac{z}{\pi n^2}\right)\right).$$

Mais $F'_{1/2} = f_{-1/2} = z^{-1/2}\exp(-\frac{i}{z})$, il vient alors, après simplification :

$$\begin{aligned} w'(z) &= \frac{(i\pi)^{1/2}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{\pi n}f_{-1/2}\left(\frac{4z}{\pi n^2}\right) - \frac{2}{\pi n}f_{-1/2}\left(\frac{z}{\pi n^2}\right)\right) \\ &= (\frac{i}{z})^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\exp\left(\frac{-i\pi n^2}{4z}\right) - \exp\left(\frac{-i\pi n^2}{z}\right)\right) \\ &= u(1+z) + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

5.8.3. On a $v_1' = u$ et

$$\forall z \in \Omega, \quad w'(z) = u(z+1) + \frac{1}{2} = \left(v_1(z+1) + \frac{z}{2}\right)'$$

et comme Ω est connexe par arcs, alors il existe $k \in \mathbb{C}$ tel que $v_1'(z+1) + \frac{z}{2} = w(z) + k$, mais l'inégalité $z \in \Omega$, $|F_{1/2}(z)| \leq 2|z|^{3/2}$ montre que $\lim_{z \to 0} w(z) = 0$, donc $k = v(1)$ et par conséquent :

$$\forall z \in \Omega, \quad v_1(z+1) - v(1) = -\frac{z}{2} + w(z).$$

5.9. On a $z \in \Omega$, $|F_{1/2}(z)| \leq 2|z|^{3/2}$, donc $\forall N \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\left(nF_{-1/2}\left(\frac{4z}{\pi n^2}\right) - 2nF_{-1/2}\left(\frac{z}{\pi n^2}\right)\right)\right| \leq K|z|^{3/2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2},$$

où $K > O$ est une constante. D'où $|w(z)| \leq |z|^{3/2}K\frac{\pi^{1/2}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, il suffit donc de prendre donc $c = K\frac{\pi^{1/2}}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

5.10. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels strictement positives de limite nulle, comme v est continue sur $\{z \in \mathbb{C}/\text{Im}(z) \geq 0\}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} v(x+iy_n) = v(x) = q(x)$, d'autre part on peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|v(x+iy_n+1) - v(1) + \frac{x+iy_n}{2}\right| \leq c|x+iy_n|^{3/2}$$

et on obtient par passage à la limite :

$$\left|q(x+1) - q(1) + \frac{x}{2}\right| \leq c|x|^{3/2}$$

et donc $q(x+1) - q(1) + \dfrac{x}{2} = O(x^{3/2})$, ceci montre que q est dérivable en et que $q'(1) = \dfrac{-1}{2}$.

• • • • • • • • • • • • •

M.Tarqi-Centre Ibn Abdoune des classes préparatoires-Khouribga. Maroc
E-mail : medtarqi@yahoo.fr